MULTIPLICADORES DE LAGRANGE APLICADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA PRODUÇÃO E DA ECONOMIA

LAGRANGE MULTIPLIERS APPLIED IN SOLVING PRODUCTION AND ECONOMY PROBLEMS

Lawine Nogueira*
João Paulo Martins dos Santos**
Alessandro Firmiano de Jesus***

RESUMO

Neste artigo, o Método dos Multiplicadores de Lagrange é utilizado para a solução de problemas de minimização adotando os pontos de vista matemático e computacional. O primeiro fornece subsídios ao pensamento crítico e entendimento dos detalhes envolvidos na formulação do problema, e o segundo, baseado em linguagem de programação de alto nível, favorece a performance dos cálculos em problemas mais complexos. Os problemas de otimização dos recursos e eficiência dos processos estão diretamente ligados à atuação da Administração e, neste contexto, aprofundar os diversos ramos do conhecimento adquirido pode auxiliar na resolução de situações que buscam o máximo de eficiência. O artigo possui foco na apresentação das soluções matemáticas do método dos multiplicadores de Lagrange e respectiva comparação com a utilização da linguagem Python. O emprego da técnica analítica resulta em cálculos matemáticos extensos e de média complexidade, enquanto que a utilização da linguagem resulta em um problema mais simplificado que pode ser facilmente adaptado em problemas mais complexos. A disponibilidade de recursos computacionais interativos e colaborativos permite a utilização conjugada tanto dos métodos matemáticos quanto computacionais. Além disso, fornece uma visão mais abrangente das relações entre Matemática e Computação.

Palavras-chave: Otimização Linear. Linguagem Python. Métodos Numéricos. *Colab.*

ABSTRACT

In this article, the Lagrange Multipliers Method is used to solve minimization problems, adopting the mathematical and computational points of view. The former provides support for critical thinking and understanding of the details involved in the formulation of the problem, while the latter, based on a high-level programming language, favors the performance of calculations in more complex problems. The problems of resource optimization and process efficiency are directly linked to the performance of the administration and in this context, deepening the various branches of acquired knowledge can help in solving situations that seek maximum efficiency. The article focuses on the presentation of the mathematical solutions of the Lagrange multipliers method and its comparison with the use of the Python language. The use of the analytical

* Oficial Int da Academia da Força Aérea-AFA. lawinenog@gmail.com
** Prof Dr na Academia da Força Aérea-AFA. jpmdossantos@yahoo.com.br
*** Prof Dr na Academia da Força Aérea-AFA. lezadro@gmail.com

technique results in extensive and medium complexity mathematical calculations, while the use of Python language results in a more simplified problem that can be easily adapted to more complex problems. The availability of interactive and collaborative computational resources allows the combined use of both mathematical and computational methods. In addition, it provides a more comprehensive view of the relationships between Mathematics and Computing.

Keywords: Linear Optimization. Python Language. Numerical Methods. *Colab*.

Introdução

Os processos logísticos avançam com o tempo e a sua eficiência é buscada de diversas maneiras. Muitas vezes existem limitações que exigem que a análise da eficiência seja mais criteriosa. Ou seja, situações que demandam a ciência dos máximos e mínimos globais ou locais em problemas são frequentes nos processos de otimização. Desta forma, na obtenção desses valores, diversos métodos matemáticos e computacionais são desenvolvidos.

Neste artigo será apresentado o Método dos Multiplicadores de Lagrange-MML, como ferramenta matemática para obter soluções em problemas de otimização com restrições da correspondente função objetivo. O emprego desse mecanismo é semelhante para diversas áreas, limitando-se a resolver um sistema de equações algébricas apenas de forma analítica ou, mediante a complexidade, por meios computacionais mais sofisticados, pois, em conjunto com as disponíveis ferramentas digitais é possível agilizar os cálculos, apresentar resultados para problemas elaborados e ainda analisar as resoluções em sua forma gráfica.

Como recurso computacional, será utilizada a linguagem de programação Python e suas bibliotecas numéricas: NumPy (WALT *et al.*, 2011) e SciPy (JONES *et al.*, 2001). A visualização dos resultados será assegurada por meio da biblioteca Matplotlib (HUNTER, 2007) que disponibiliza uma série de funções para a visualização gráfica 2D. A integração entre os diversos recursos computacionais foi desenvolvida dentro do ambiente Colaborativo do Google (CARNEIRO, 2018). A utilização do método computacional oferece agilidade na obtenção dos resultados. Desta forma, a linguagem Python (BORGES, 2014) é considerada fácil pelos usuários iniciantes, pois possui uma sintaxe simples. Ao associar o MML ao Python e suas bibliotecas NumPy e SciPy, obtém-se um conjunto de ferramentas com finalidades diversas e aplicações variadas, tais como, a solução de sistemas de equações algébricas, solução de problemas de minimização e cálculos de zeros polinomiais, alguns dos quais podem ser utilizados na resolução das equações provenientes do MML, entre outros.

1 Estratégias de Armazenagem

De acordo com Ballou (2006), na Administração o estoque representa muito mais que uma necessidade, ele representa algo economicamente conveniente se for utilizado da melhor maneira possível. Assim, são descritas quatro razões básicas para se criar um estoque, dentre elas: reduzir os custos de transporte e coordenar oferta e demanda.

Há diversos custos para manter um estoque, como a manutenção do espaço, iluminação e higienização, mas a redução com o custo do transporte dos produtos entre o local de sua produção e o ponto de venda pode compensar a manutenção do estoque, se o aspecto levado em consideração for apenas financeiro. Além desta característica, há outros pontos que devem ser levados em consideração para decidir manter um estoque. Na Força Aérea Brasileira (FAB) por exemplo, há vantagem em se manter estoques nos Postos de Fardamento, para economizar combustível dos caminhões utilizados nas distribuições e para agilizar a entrega do material para os militares, uma vez que o Órgão Central (SDAB) responsável pelos fardamentos de toda a FAB localiza-se no Rio de Janeiro. Ainda na FAB, para os ranchos o estoque auxilia na sua demanda constante, amparado por legislações específicas, a FCA 145-13 (MINISTÉRIO DA DEFESA, 2008) prevê um estoque de segurança para que o atendimento não seja suspenso em casos de problemas na distribuição.

Caso o estoque seja otimizado, transformá-lo em um estoque mais eficiente se torna uma tarefa mais exequível. Conciliar o estoque mínimo necessário para o atendimento em determinado período com o estoque máximo realizando uma utilização racional do espaço é um desafio para muitos administradores. Em outras palavras, Ballou (2006, p. 374) afirma que "o objetivo é utilizar o espaço certo de estocagem para que se possa concretizar um equilíbrio eficiente e econômico entre os custos de armazenamento, produção e transporte".

É importante para quaisquer instituições que possuem estoques, como a FAB, que eles sejam eficientes e auxiliem na redução dos custos totais. Os problemas de otimização apresentam várias áreas de trabalho, sendo um deles o cálculo dos pontos de máximos e mínimos de funções com restrições.

1.1 Economia Eficiente

O aspecto econômico é muito importante para qualquer estratégia de administração, uma vez que ele influencia praticamente todos os demais setores envolvidos. É essencial que se faça uma gestão eficiente dos recursos, buscando a maximização dos lucros e a minimização de custos. A análise de se ter ou não um estoque, como citado anteriormente, é um exemplo do quanto o aspecto financeiro pode interferir na tomada de decisões.

Segundo Silva (2010), a maximização de lucros e a minimização de custos é um desejo recorrente do tomador de decisão. No entanto, essa otimização costuma estar acompanhada de restrições, o que a torna o problema complexo. Por exemplo, uma demanda a ser atendida ou o tempo escasso que está disponível para determinada produção. Em alguns casos, a demanda pode ser pequena demais para atingir o lucro desejado ou o tempo disponível não permite atender a todos os envolvidos no processo produtivo.

Portanto, estudos no ramo da Economia nesta abordagem são vistos como uma forma para o administrador atingir suas metas de maneira eficaz mesmo em situações em que os recursos são escassos. Nesse caso, a própria escassez é uma restrição a ser levada em consideração na otimização do processo.

2 Otimização Restrita e Mecanismos de Solução

Visando a apresentação de casos em que normalmente é desejada a sua otimização, a sua importância para o ramo da Administração e alguns meios pelos quais ela é obtida, a presente seção apresenta os tópicos sobre armazenagem e economia, expõe um método matemático de resolução analítica e uma ferramenta computacional para a resolução numérica via linguagem Python.

2.1 MML Analítico

O Método dos Multiplicadores de Lagrange-MML é conhecido por auxiliar na resolução de questões em que se deseja obter valores máximos e mínimos condicionados. O método fornece soluções para problemas de otimização sujeitos a restrições de valores da função objetivo, diferentemente de métodos de minimização ou maximização global, o que faz dele uma das estratégias numéricas mais aplicável em situações reais.

Como pode ser visto em Stewart (2017), a base para o desenvolvimento do MML são os conceitos do Cálculo Diferencial presentes na grade curricular da maioria dos cursos de graduação. É válido ressaltar que para as funções de duas variáveis o método ainda proporciona uma visualização geométrica.

Para relembrar conceitos, a Derivada expressa a taxa de variação de uma função $g(x)$ e é denotada por $g'(x)$. Desta forma, no contexto da função de uma variável real, os máximos e mínimos podem ser analisados seguindo a definição abaixo:

Definição

> Uma função f tem **máximo absoluto** (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D. Analogamente, f tem um **mínimo absoluto** em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D, e o número $f(c)$ é denominado valor mínimo de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.

Além disso, de acordo com o Teorema do Valor Extremo (STEWART, 2017), se f for contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então f assume um valor máximo $f(c)$ e um valor mínimo $f(d)$ em certos valores c e d pertencentes ao intervalo $[a,b]$.

Uma questão natural surge ao se considerar as funções de várias variáveis, as quais modelam uma quantidade maior de fenômenos. No caso de uma função de duas variáveis reais, o teorema apresentado em Stewart (2017) garante que, se uma função $f(x,y)$ possui um máximo ou um mínimo no ponto de coordenadas (a,b), então as derivadas parciais existem neste ponto e são iguais a zero.

Ou seja,

$$\begin{cases} f_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Segundo Stewart (2017), se f for uma função com duas variáveis, suas derivadas parciais são obtidas ao considerar uma das variáveis como uma constante e realizar o cálculo da derivada sobre a outra variável. Sendo assim, considerando uma função $f(x,y)$, para determinar a derivada de f com relação a x, deve-se tratar y como uma constante. De forma análoga, para determinar a derivada de f com relação a y, deve-se tratar x como uma constante.

Dessa forma, as derivadas parciais representam a taxa de variação de uma variável quando a outra é fixada e existem várias notações para representá-las. As mais comuns são apresentadas a seguir em 2.2.

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \tag{2.2}$$

O MML é baseado também no conceito de vetor gradiente, denotado por ∇f . O vetor gradiente é definido com base nos conceitos de derivadas parciais e expresso por:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{2.3}$$

sendo $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ representando as n variáveis reais da função f. Este vetor indica a direção da maior taxa de crescimento da função f . Logo, o vetor oposto indicado por $-\nabla f$ aponta na direção da maior taxa de decrescimento de f.

Matematicamente, o MML pode ser definido, em sua forma mais geral, como um instrumento para determinar os valores máximo e mínimo de funções $f\,(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ sujeitas a restrições do tipo $g(x_1,x_2,x_3,...,x_n) = k$, e $\nabla f(x) \neq 0$, por meio de um sistema de equações como segue (PAUL's Note, 2021):

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \qquad\quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k \end{cases} \tag{2.4}$$

em que λ é o **Multiplicador de Lagrange** e k é uma constante arbitrária. Ao descrever o sistema de equações (2.4) de forma mais detalhada, tem-se:

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda g_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda g_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_{x_3}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda g_{x_3}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda g_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \qquad\quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k \end{cases} \tag{2.5}$$

Assim, no esquema (2.5) fica claro que trata-se do sistema de equações simultâneas com as n + 1 incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$ relacionadas em n + 1 equações.

A restrição às funções de duas variáveis simplifica a notação matemática da expressão (2.3) para $\nabla f(x,y) = (f_x, f_y)$. Desse modo, a forma geral da equação (2.4) e a forma mais detalhada (2.5) podem ser escritas como um sistema com três equações e três incógnitas x, y e λ como segue:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ \quad g(x,y) = C \end{cases} \tag{2.6}$$

O conjunto de equações (2.6) pode ser resolvida analiticamente em alguns casos. Um exemplo da aplicação do MML para funções de duas variáveis e uma restrição de igualdade é apresentado a seguir.

Aplicação 1: Determinar os pontos de mínimo da função bilinear $f\,(x,y) = ax + by$ sujeito à restrição $g(x,y) = cx^2 + dy^2 = C$ em que a, b, c, d, C são constantes arbitrárias.

Resolução MML: Neste caso, o sistema não-linear pode ser descrito como segue:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda \cdot 2cx \\ b = \lambda \cdot 2dy \\ cx^2 + dy^2 = C \end{cases} \quad (2.7)$$

O sistema (2.7) pode ser resolvido desde que $\lambda \neq 0$. Ou seja:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2\lambda c} \\ \\ y = \dfrac{b}{2\lambda c} \end{cases} \quad (2.8)$$

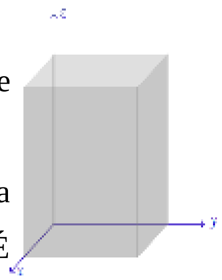
Logo, substituindo os valores obtidos em (2.8) na última equação de (2.7):

$$cx^2 + dy^2 = C \Rightarrow c \cdot \left(\frac{a}{2\lambda c}\right)^2 + d \cdot \left(\frac{b}{2\lambda c}\right)^2 = C \Rightarrow \frac{da^2+cb^2}{4\lambda^2 cd} = C \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{da^2+cb^2}{4Ccd}}$$

(2.9)

A partir disso, pode-se substituir o valor obtido para λ nas duas primeiras equações do sistema (2.7) para encontrar os respectivos valores de *x* e *y* que otimizam a função bilinear.

No caso de três variáveis, a segunda aplicação considera o cálculo do volume máximo de uma caixa retangular.



Aplicação 2: Uma caixa retangular sem tampa é feita de 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa (STEWART, 2017).

Resolução MML: Considere x, y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros, conforme a figura ao lado. É necessário maximizar $V(x,y,z) = xyz$ atendendo à restrição imposta pelas áreas laterais da caixa sem a tampa, dadas por $g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 12$. Utilizando o MML, determina-se as equações:

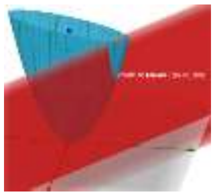
$$\begin{cases} \nabla V(x,y,z) = \lambda g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 12 \end{cases} \quad (2.10)$$

Desenvolvendo (2.10) segue que:

$$\begin{cases} V_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z) \\ V_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z) \\ V_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda(y+2z) \\ xz = \lambda(x+2z) \\ xy = \lambda(2x+2y) \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y,\ \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ (x,y,z) = (2,2,1) \end{cases}$$

Logo, as dimensões da caixa de volume máximo dado por $V_{max} = 4\ m^3$ possuem os valores de comprimento *x* = 2 *m*, de largura *y* = 2 *m* e de altura *z* = 1 *m*.

Aplicação 3: Um terceiro exemplo é a resolução obtida por meio da função lagrangeana de um problema não-linear adaptado de Silva (2010) em que é necessário para determinar o extremo relativo da função $f(x,y) = y^2 - 3xy + 4x^2$ restrito à $g(x,y) = 2x + 3y = 232$.



Resolução MML: A Função de Lagrange equivalente é uma representação na forma:

$$F(x,y,\lambda) = \overbrace{y^2 - 3xy + 4x^2}^{f(x,y)} - \lambda(g(x,y) - 232) \tag{2.11}$$

Considerando as derivadas parciais nulas em (2.11) tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 8x - 3y - 2\lambda = 0 & (i) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -3x + 2y - 3\lambda = 0 & (ii) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -(2x + 3y - 232) = 0 & (iii) \end{cases}$$

Isolando λ em (ii) e (iii) segue que:

$$\begin{cases} 2\lambda = 8x - 3y \\ 3\lambda = -3x + 2y \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{8x - 3y}{2} = \frac{-3x + 2y}{2} \Rightarrow x = \frac{13y}{30} \underbrace{\Rightarrow}_{(iii)} y = 60 \Rightarrow \begin{cases} x = 26 \\ \lambda = 14 \end{cases}$$

Assim, $x = 26$, $y = 60$ e $\lambda = 14$ é a solução que otimiza o problema da Aplicação 3. Para verificar se esses valores representam um ponto de máximo ou de mínimo da função $f(x,y)$, aplica-se o **Teste da Derivada Segunda** avaliando o sinal de $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$.

$$f(x,y) = y^2 - 3xy + 4x^2 \Rightarrow \Delta = \left(\underbrace{8}_{f_{xx}}\right) \cdot \left(\underbrace{2}_{f_{yy}}\right) - \left(\underbrace{-3}_{f_{xy}}\right)^2 = 7 > 0$$

Uma vez que $\Delta > 0$, $f_{xx} > 0$ e $f_{yy} > 0$, segue que $(x,y) = (26,60)$ é um **Ponto de Mínimo** restrito ao plano $2x + 3y = 232$ e ainda, $f(26,60) = 60^2 - 3 \cdot 26 \cdot 60 + 4 \cdot 26^2 = 1.624$ é o correspondente **Valor Mínimo** da função $f(x,y)$.

2.2 MML em Python

A linguagem de programação é o meio pelo qual o modelo é transformado em código computacional. Neste sentido, a linguagem Python pode ser empregado na resolução dos sistemas de equações algébricas originados da aplicação do MML.

A biblioteca SciPy, por meio do pacote scipy.optimize e dos algoritmos que ele fornece, possibilita a solução mais rápida e direta dos problemas envolvendo os

Multiplicadores de Lagrange.

São itens essenciais, a definição da função de várias variáveis a ser minimizada, a definição das restrições e a definição do algoritmo que será utilizado no processo de solução dos sistemas algébricos. As restrições impostas pelos problemas são inseridas nas equações via um correspondente dicionário de restrições. De acordo com Downey (2016), estes dicionários são mapeamentos semelhantes a listas que apresentam uma associação entre chaves e valores de forma não ordenada.

No trecho de código a seguir foi expressa a importação da função minimize do pacote scipy.optimize. Em seguida, está a definição da função a ser minimizada com utilização da função anônima lambda e subsequentemente nomeada para fun. As restrições são apresentadas na forma de um dicionário cons, no qual o tipo de restrição e a respectiva equação da restrição são definidas. Finalmente, a função de minimização é chamada e são fornecidos os parâmetros: função a ser minimizada, estimativa inicial para o ponto de mínimo, algoritmo de minimização que será utilizado e as restrições.

```
from scipy . optimize import minimize
fun = lambda x: 4*(x [0]) **2 + x[1]**2 − 3*x[0]*x[1]
cons = ({’ type’ : ’eq’ , ’fun’ : lambda x: 2*x[0] + 3*x[1] − 232})
res = minimize(fun, (1,1) , method=’SLSQP’, constraints=cons)
print ( res )
```

O resultado do trecho de código anterior é apresentado na Figura 1. Os resultados mostram, entre outros detalhes, o valor da função, o valor da matriz jacobiana, a mensagem de sucesso para o processo de otimização e o ponto no qual a função atinge o mínimo local.

```
     fun: 1623.999999999999
     jac: array([28., 42.])
 message: 'Optimization terminated successfully.'
    nfev: 13
     nit: 3
    njev: 3
  status: 0
 success: True
       x: array([25.99999998, 60.00000002])
```

Figura 1 – Resultado da solução do Método dos Multiplicadores de Lagrange utilizando a ferramenta de otimização do SciPy.

Descartando a necessidade de conhecimento em programação, os cálculos são executados de uma maneira mais ágil e a resposta obtida foi a mesma da resolução analítica. Deve ser notado que uma modificação da função a ser minimizada ou das restrições, pode ser prontamente resolvida pelo mesmo código.

Além da rapidez, com um pouco mais de aprofundamento e conhecimento das bibliotecas disponíveis, a utilização da linguagem de programação pode fornecer a visualização gráfica com curvas de nível da função e a restrição imposta.

```
from scipy . optimize import minimize import numpy as np
import matplotlib . pyplot as plt import math
from matplotlib import cm
fun = lambda x: 4∗(x [0]) ∗∗2 + x[1]∗∗2 − 3∗x[0]∗x[1]
a=75; b=80
x = np. linspace (−(a/2) , a, 20) y = np. linspace (0, b, 20)
xg, yg = np.meshgrid(x, y)
cons = ({' type' : 'eq' , 'fun' : lambda x: 2∗x[0] + 3∗x[1] − 232})
res = minimize(fun, (1,1) , method='SLSQP', constraints=cons) teste1 = lambda x: 2∗x[0] + 3∗x[1] − 232
plt . figure ( figsize =(10,8) )
Nlevels=80 z=fun([xg, yg])
imag=plt. imshow(z, extent =[−(a/2), a, 0, b ], cmap=cm.winter_r)
plt . contour(xg,yg,fun ([ xg,yg]) , Nlevels )
plt . contour(xg,yg, teste1 ([ xg,yg]) , np. array ([0.0]) , colors ='r') plt . colorbar (imag)
plt . scatter ( res . x [0], res . x [1])
plt . show()
```

Como exemplo, é evidenciado o código acima e o gráfico fornecido por ele na Figura 2 representando o problema resolvido anteriormente:

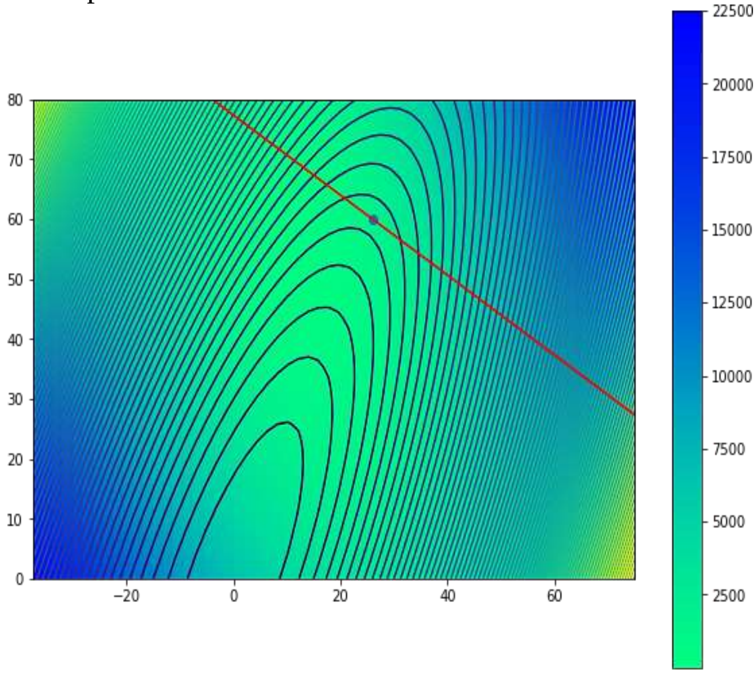


Figura 2 – Curvas de nível representativas do Exemplo 3

Dentre os dados mostrados no código anterior, têm-se informações do gráfico como tamanho, os valores do eixo que serão retratados na figura e o mapa de cores. Devido a possibilidade de conflito de nomes de funções entre as diferentes bibliotecas, é indicado que um prefixo seja adicionado.

3 Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentadas algumas aplicações do MML com resolução analítica e resolução numérica por meio da linguagem Python nos casos de otimização em problemas envolvendo armazenagem e custo de produção.

3.1 Problema 1 - Maximização de Volume

Como exemplo da aplicação da metodologia apresentada em estoques, pode-se considerar o seguinte caso:

Foi sugerida a uma empresa a utilização do espaço de um galpão como seu estoque. O dono do galpão fixou o preço de R$3,00 para cada metro quadrado no solo considerando a largura e o comprimento e, devido ao uso de empilhadeira, o preço de R$5,00 reais para cada metro quadrado na direção vertical. Ao fazer algumas contas, o empresário determinou que gastaria R$ 1.230,00 com esse estoque. O Problema é determinar a melhor forma de estocar o material no galpão em apenas uma caixa para que ele tenha um gasto eficiente.

Resolução: O empresário precisa maximizar o volume da caixa com custo de valor determinado, ou seja, considerando x o comprimento da caixa, y a sua largura e z a sua altura, obter o máximo da função $V(x,y,z) = xyz$ com a restrição de custos dado por $g(x,y,z) = 3xy + 5xz + 5yz = 1230$, conforme a Função de Lagrange (3.1).

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(g(x,y,z) - 1230) \tag{3.1}$$

A partir de (3.1) calculam-se as derivadas parciais de F:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = yz - (3y + 5z)\lambda = 0 & (i) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz - (3x + 5z)\lambda = 0 & (ii) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xy - (5x + 5z)\lambda = 0 & (iii) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 3xy + 5xz + 5yz - 1230 = 0 & (iv) \end{cases} \tag{3.2}$$

Colocando o multiplicador λ em evidência nas equações $(i) - (iii)$, segue que:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{yz}{3y + 5z} \\ \lambda = \dfrac{xz}{3x + 5z} \\ \lambda = \dfrac{xy}{5y + 5y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x = 5z \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{(iv)} \begin{cases} z \approx 7{,}01\ m \\ x \approx 11{,}69\ m \\ y \approx 11{,}69\ m \end{cases}$$

Comparativamente, a resolução MML Python proveniente do código abaixo:

```
from scipy . optimize import minimize fun = lambda (x, y, z) : −(x∗y∗z)
cons = ({’ type’ : ’eq’ , ’fun’ : lambda (x, y, z) : 3∗x∗y + 5∗x∗z + 5∗y∗z − 1230})
res = minimize (fun, (10,10,10) , method=’SLSQP’, constraints=cons, tol =1.0e−10)
print ( res )
```

fornece o seguinte resultado de **Maximização** apresentado na Figura 3:

```
     fun: -958.6170594490471
     jac: array([ -82.00000763,   -82.        ,  -136.66665649])
 message: 'Optimization terminated successfully.'
    nfev: 217
     nit: 36
    njev: 36
  status: 0
 success: True
       x: array([11.69045191, 11.6904525 ,  7.01427085])
```

Figura 3 – Resultado do Problema 1 com Python

Vale ressaltar que, devido a utilização da função minimize da biblioteca SciPy, que tem a finalidade de minimizar funções, a função a ser maximizada foi escrita com sinal negativo e a resposta obtida também foi tomada com o sinal negativo. Esse artifício matemático é um recurso útil e comum em problemas de otimização que envolvem abordagens computacionais.

3.2 Problema 2 - Minimização de Custos de Produção

Como exemplo da aplicação do MML de resolução de problemas de minimização na Economia, é apresentado um caso adaptado de Parizi (2018):

Uma empresa matriz gerencia três fábricas filiais: A, B e C, todas com a finalidade de produzir o mesmo produto que são mochilas de couro. Um pedido de 530 mochilas foi recebido pela empresa matriz. Cada uma das fábricas A, B e C possuem o custo de produção, em reais, dado por:

$$\begin{cases} C_A(x) = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 5 \\ C_B(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 13 \\ C_C(z) = \left(\frac{3z}{4}\right)^2 - 2 \\ x + y + z = 530 \end{cases} \quad (3.3)$$

sendo x, y e z as quantidades de mochilas produzidas nas respectivas fábricas.

Nessas condições, a matriz precisa determinar as quantidades que devem ser produzidas em cada filial de modo que o custo total de produção seja minimizado.

Resolução: Considere a Função de Lagrange:

$$F(x,y,z,\lambda) = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{4}\right)^2 + 16 + \lambda(x+y+z-530) \qquad (3.4)$$

Aplicando o MML em (3.4) segue que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{8x}{9} - \lambda = 0 & (i) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{y}{2} - \lambda = 0 & (ii) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{9z}{8} - \lambda = 0 & (iii) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 530 = 0 & (iv) \end{cases} \qquad (3.5)$$

Assim,

$$\frac{8x}{9} = \frac{y}{2} = \frac{9z}{8} \underbrace{\Rightarrow}_{(iv)} \begin{cases} x \approx 148{,}54 \\ y \approx 264{,}08 \\ z \approx 117{,}37 \end{cases}$$

Uma vez que a mochila produzida não permite fracionamento, deve-se usar o valor inteiro mais próximo da resposta obtida para que o custo seja minimizado.

Assim, são obtidas as respectivas quantidades de mochilas produzidas nas filiais A, B e C: $x = 149$ unidades, $y = 264$ unidades e $z = 117$ unidades. O **custo mínimo** de produção das 530 mochilas é dado por

$$C_T(149{,}264{,}117) = C_A(149) + C_B(264) + C_C(117) = R\$\ 35.007{,}17$$

A correspondente resolução de Minimização em Python é obtida da execução do seguinte *script*:

```
from scipy . optimize import minimize
fun = lambda (x, y, z) : (2*x/3)**2 + (y/2) **2 + (3*z/4) **2 + 16
cons = ({' type' : 'eq' , 'fun' : lambda (x, y, z) : x + y + z − 530})
res = minimize(fun, (1,1,1) , method='SLSQP', constraints=cons)
print ( res )
```

A resolução MML Python segue na Figura 4.

```
     fun: 35007.00346026714
     jac: array([132.04199219, 132.04199219, 132.04199219])
 message: 'Optimization terminated successfully.'
    nfev: 35
     nit: 7
    njev: 7
  status: 0
 success: True
       x: array([148.5469749 , 264.08271842, 117.37030668])
```

Figura 4 – Resultado do Problema 2 com Python

Da mesma forma que foi determinado via resolução analítica, determina-se que a otimização do Problema 2 é obtida se a fábrica A produzir 149 mochilas, a fábrica B produzir 264 mochilas e a fábrica C produzir 117 mochilas.

3.3 Problema 3 - Minimização de Custos de Materiais

Para problema de minimização de custos de materiais segue exposta uma outra situação adaptada de Parizi (2018).

Uma fábrica de embalagens retangulares para acondicionar creme de leite produz caixinhas de volume $V = 96\, cm^3$. Devido à necessidade de empilhar as caixinhas no transporte e nos locais de venda, o material da base e da tampa são mais reforçados e custam $\frac{3}{2}$ do valor do material usado nas laterais. O Problema 3 é determinar as dimensões das caixinhas de forma que o custo de produção seja minimizado.

Resolução: Convencionando um custo de $2a$ para o material das laterais da caixinha e um custo de $3a$ para o material da tampa e da base, fica estabelecida a seguinte Função de Lagrange:

$$F(x,y,z,\lambda) = 3xya + 2zxa + 2yza + \lambda(xyz - 96) \tag{3.6}$$

Aplicando o MML em (3.6) segue que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3ya + 2za - \lambda yz = 0 & (i) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3xa + 2za - \lambda xz = 0 & (ii) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xa + 2ya - \lambda xy = 0 & (iii) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = xyz - 96 = 0 & (iv) \end{cases} \tag{3.7}$$

Logo,

$$\lambda = \frac{3ya + 2za}{yz} = \frac{3xa + 2za}{xz} = \frac{2xa + 2ya}{xy} \underbrace{\Rightarrow}_{(iv)} \begin{cases} x = y = 4 \\ z = 6 \end{cases}$$

Assim, atribuindo $a = 2$ centavos, o custo final de produção de cada caixinha é:

$$C_T(4,4,6) = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 = \text{R\$ } 2{,}88$$

A resolução obtida pela aplicação do código Python do *script* abaixo:

```
from scipy . optimize import minimize a = 2
fun = lambda (x, y, z) : 3*x*y*a + 2*z*x*a + 2*y*z*a
cons = ({' type' : 'eq' , 'fun' : lambda (x, y, z) : x*y*z − 96})
 res = minimize(fun, (4,4,4) , method='SLSQP', constraints=cons)
print ( res )
```

obtêm a mesma resolução analítica encontrada pelos resultados MML da Figura 5.

```
     fun: 288.00000364972414
     jac: array([47.99734879, 47.99734879, 32.00352859])
 message: 'Optimization terminated successfully.'
    nfev: 448
     nit: 76
    njev: 75
  status: 0
 success: True
       x: array([4.00044159, 4.00044144, 5.99867567])
```

Figura 5 – Resultados do Problema 3 com Python

Considerações finais

As aplicações de otimização representadas pelos Problemas 1, 2 e 3, evidenciaram que cada resolução via abordagem analítica para a determinação dos extremos da Função de Lagrange apresentou cálculos matemáticos extensos e de média complexidade. Foi possível observar também que a implementação Python do correspondente MML proporcionou maior agilidade na obtenção das mesmas respostas de Máximos ou de Mínimos para esses problemas.

Nesta abordagem computacional, caso algum valor seja alterado, é necessário apenas uma atualização na entrada do código e executar o *script* novamente.

Apesar da necessidade de domínio das ferramentas computacionais, a resolução MML via Python não fica restrita aos sistemas simples, que podem ser resolvidos manualmente, e pode englobar restrições e funções mais complexas. Dessa forma, a resolução por meios computacionais se torna mais rápida e proporciona agilidade ao trabalho de otimização. Além disso, ressalta-se que há outras questões relacionadas aos métodos numéricos tais como os erros numéricos, os quais não foram o foco da discussão, mas destacam a precisão dos métodos computacionais. Ainda na abordagem digital, uma vez que as ferramentas computacionais utilizadas permitem a utilização de códigos dos mais simples aos mais elaborados, se faz necessário o desenvolvimento conceitual sobre ambos, a linguagem de programação e o ambiente colaborativo. A partir disso, é possível ter maior agilidade na obtenção dos resultados sobre o MML e até mesmo apresentá-los em formas gráficas quando houver menos de três variáveis no problema a ser otimizado.

Referências

BALLOU, R. H. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos Logística empresarial**. 5. ed. [S.l.]: Bookman, 2006.

BORGES, L. E. **Python para desenvolvedores**. São Paulo: Novatec, 2014.

CARNEIRO, T. *et al.* Performance analysis of google colaboratory as a tool for accelerating deep learning applications. **IEEE Access**, v. 6, p. 1-9, 2018.

DOWNEY, A. B. **Pense em Python**: pense como um cientista da computação. [S.l.]: Novatec, 2016.

HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2d graphics environment. Computing in Science & Engineering, **IEEE COMPUTER SOC**, v. 9, n. 3, p. 90-95, 2007.

JONES, E. *et al.* **SciPy: Open source scientific tools for Python**. 2001. Disponível em: http://www.scipy.org/. Acesso em: 15 abr. 2020.

MINISTÉRIO DA DEFESA. **Estoque de alimentos para situações especiais: FCA 145-13.** [S.l.]: Comando da Aeronáutica. Diretoria de Intendência, 2008.

PARIZI, M. C. de M. **Aplicações do Método dos Multiplicadores de Lagrange**. 2018. 56 f. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Marabá, 2018.

PAUL's Notes. **Lagrange Multipliers**. Disponível em: https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/LagrangeMultipliers.aspx. Acesso em: 28 jun. 2021.

SILVA, L. M. O. de. **Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

WALT, S. Van der; COLBERT, S.; VAROQUAUX, G. The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation. **Computing in Science Engineering**, v. 13, n. 2, p. 22-30, 2011.